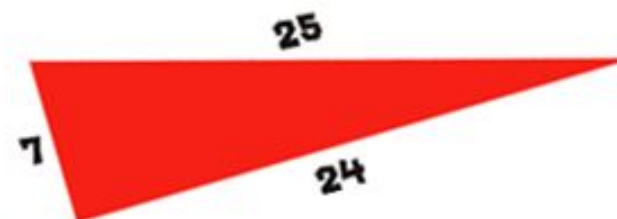
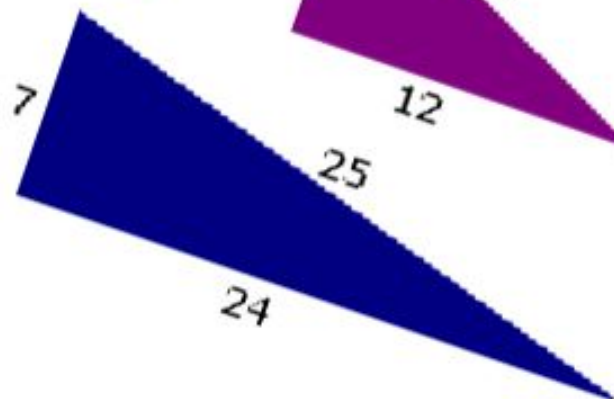
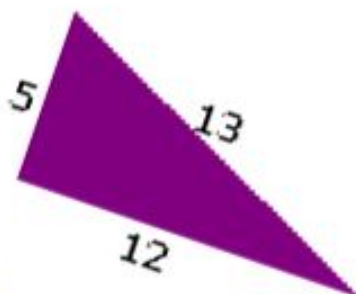
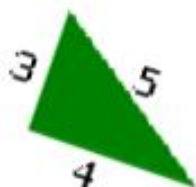
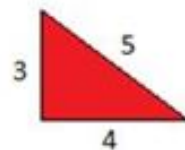
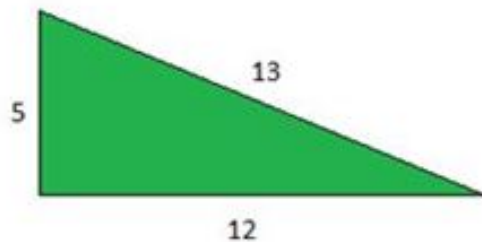
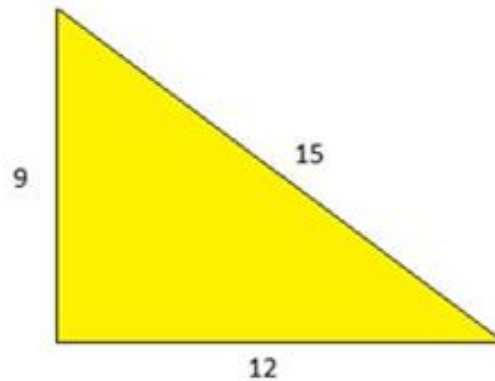
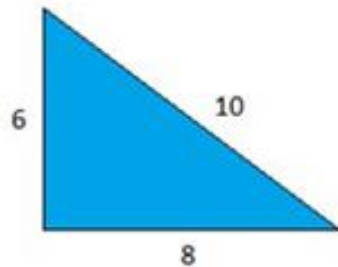


# Trójki pitagorejskie



# Trójkąt Pitagorejski

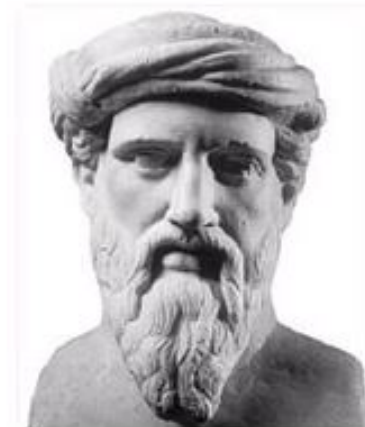
Trójkąty pitagorejskie



Trójkąt pitagorejski, to taki trójkąt, którego boki są wyrażone liczbami naturalnymi  $a$ ,  $b$ ,  $c$  związanymi warunkiem:  $a^2 + b^2 = c^2$ . Będą to, jak wiemy trójkąty prostokątne. Znany jest trójkąt egipski o bokach wyrażonych liczbami 3, 4 i 5. W Egipcie wiedzano, że jest to trójkąt prostokątny, i używano go do wyznaczania kątów prostych przy odnawianiu granic gruntowych zmywanych dorocznymi wylewami Nilu. Pitagoras przekazał nam związek między bokami trójkąta egipskiego, wyrażony wzorem  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

# Historia

Jednym z najbardziej znanych i znaczących osiągnięć szkoły pitagorejskiej jest twierdzenie Pitagorasa. Sama nazwa może być jednak myląca, ponieważ nie można z całą pewnością stwierdzić, czy autorem tego twierdzenia był Pitagoras. Nie zachowały się bowiem żadne jego pisma, a częstą praktyką było w tamtych czasach powoływanie się uczniów na autorytet mistrza. Nie ulega jednak wątpliwości, że dowód twierdzenia powstał w szkole pitagorejskiej.



Pitagoras

---

# Własności

Jeżeli trójka  $(a, b, c)$  jest pitagorejska, to jest nią też  $(da, db, dc)$ , dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $d$ . Trójkę pitagorejską nazywamy **pierwotną**, jeśli  $a, b$  i  $c$  nie mają wspólnego dzielnika większego od 1. Zatem z każdej trójki pitagorejskiej możemy uzyskać pierwotną przez podzielenie jej przez największy wspólny dzielnik i dowolną trójkę pitagorejską możemy otrzymać z pierwotnej przez pomnożenie jej wszystkich trzech elementów przez odpowiednią tę samą liczbę całkowitą dodatnią.

Jeżeli  $m > n$  są liczbami naturalnymi to:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2 \cdot m \cdot n$$

$$c = m^2 + n^2$$



Jest trójką pitagorejską. Jest ona pierwotna wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze i ich suma jest liczbą nieparzystą. Trójki pitagorejskiej  $(9, 12, 15)$ , jak również wielu innych, w ten sposób nie otrzymamy, ale każda trójka pierwotna (być może po zamianie  $a$  i  $b$ ) powstaje tą drogą z jedynej pary liczb względnie pierwszych  $m > n$ . Stąd wniosek, że istnieje nieskończenie wiele pierwotnych trójek pitagorejskich.

---

# Własności

Jeżeli trójka  $(a, b, c)$  jest pitagorejska, to jest nią też  $(da, db, dc)$ , dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $d$ . Trójkę pitagorejską nazywamy **pierwotną**, jeśli  $a, b$  i  $c$  nie mają wspólnego dzielnika większego od 1. Zatem z każdej trójki pitagorejskiej możemy uzyskać pierwotną przez podzielenie jej przez największy wspólny dzielnik i dowolną trójkę pitagorejską możemy otrzymać z pierwotnej przez pomnożenie jej wszystkich trzech elementów przez odpowiednią tę samą liczbę całkowitą dodatnią.

Jeżeli  $m > n$  są liczbami naturalnymi to:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2 \cdot m \cdot n$$

$$c = m^2 + n^2$$



Jest trójką pitagorejską. Jest ona pierwotna wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze i ich suma jest liczbą nieparzystą. Trójki pitagorejskiej  $(9, 12, 15)$ , jak również wielu innych, w ten sposób nie otrzymamy, ale każda trójka pierwotna (być może po zamianie  $a$  i  $b$ ) powstaje tą drogą z jedynej pary liczb względnie pierwszych  $m > n$ . Stąd wniosek, że istnieje nieskończenie wiele pierwotnych trójek pitagorejskich.

# Własności

Jeżeli trójka  $(a, b, c)$  jest pitagorejska, to jest nią też  $(da, db, dc)$ , dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $d$ . Trójkę pitagorejską nazywamy **pierwotną**, jeśli  $a, b$  i  $c$  nie mają wspólnego dzielnika większego od 1. Zatem z każdej trójki pitagorejskiej możemy uzyskać pierwotną przez podzielenie jej przez największy wspólny dzielnik i dowolną trójkę pitagorejską możemy otrzymać z pierwotnej przez pomnożenie jej wszystkich trzech elementów przez odpowiednią tę samą liczbę całkowitą dodatnią.

Jeżeli  $m > n$  są liczbami naturalnymi to:

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2 \cdot m \cdot n$$

$$c = m^2 + n^2$$



Jest trójką pitagorejską. Jest ona pierwotna wtedy i tylko wtedy, gdy  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze i ich suma jest liczbą nieparzystą. Trójki pitagorejskiej  $(9, 12, 15)$ , jak również wielu innych, w ten sposób nie otrzymamy, ale każda trójka pierwotna (być może po zamianie  $a$  i  $b$ ) powstaje tą drogą z jedynej pary liczb względnie pierwszych  $m > n$ . Stąd wniosek, że istnieje nieskończenie wiele pierwotnych trójek pitagorejskich.

# JAK ICH SZUKAĆ?

Mówimy, że trzy liczby naturalne  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tworzą trójkę pitagorejską, jeśli spełniają równość

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Archeolodzy znaleźli glinianą tabliczkę, na której starożytni Babilończycy zapisali listę takich trójek już tysiąc lat przed Pitagorasem!

Przykłady trójek pitagorejskich:

3,4,5 6,8,10 5,12,13

Odkrycie ogólnej metody znajdowania trójek pitagorejskich przypisuje się greckiemu matematykowi Diofantosowi (III w. n.e.).

Jeśli  $n$  i  $k$  są liczbami naturalnymi i  $n > k$ , to liczby:

$$a = n^2 - k^2, b = 2nk, c = n^2 + k^2$$

spełniają zależność  $a^2 + b^2 = c^2$ .

